KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

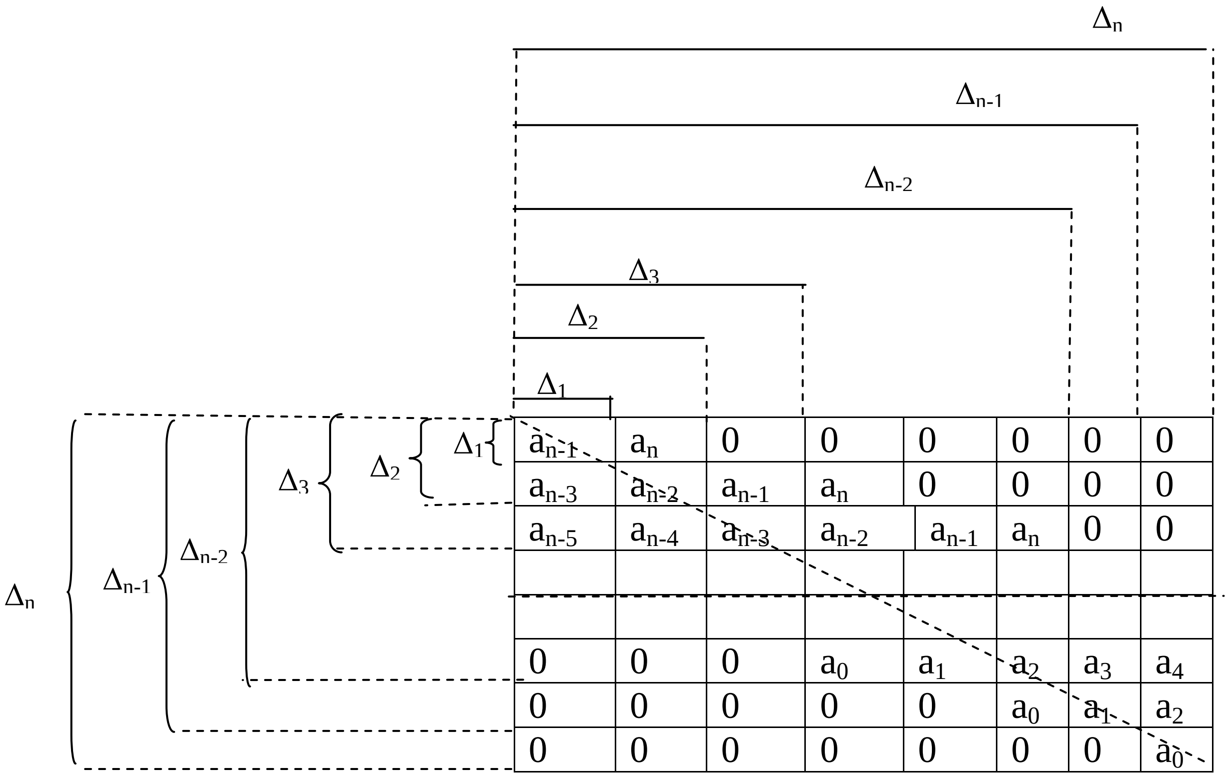
1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $\Delta_1>0;\ \ \Delta_2>0;\ \ldots\ \ \Delta_{n-2}>0;\ \ \Delta_{n-1}>0;$

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.



Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0\,\Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,

b) zbudować ciąg podwyznaczników Δ_1, Δ_2…. Δ_{n-1} i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \\ 0\ \ , \mathbf{a}_0 \end{vmatrix} = a_1a_0.>0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$\mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_1a_2.-a_0a_3>0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0\,\Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$\mathbf{a}_4\mathbf{s}^4 + \mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = a_3\,a_2 - a_1a_4>0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, 0 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ 0,\ \ \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_3\,(a_1\,a_2 - a_3a_0) - a_4\,a_1^2\ \ >0$$

Ponieważ

$$a_3\,(a_1\,a_2 - a_3a_0) - a_4\,a_1^2 = a_1\underbrace{(a_3\,a_2 - a_2a_4)}_{\Delta_2} - a_0\,a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$

KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $\Delta_1>0;\quad \Delta_2>0;\ \ldots\ \Delta_{n-2}>0;\ \Delta_{n-1}>0;$

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.

a_{n-1}	a_n	0	0	0	0	0	0
a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0	0	0	0
a_{n-5}	a_{n-4}	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0	0
0	0	0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	0	0	0	a_0	a_1	a_2
0	0	0	0	0	0	0	a_0

Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0\, \Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,

b) zbudować ciąg podwyznaczników Δ_1, Δ_2…. Δ_{n-1} i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ 0\ , a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_{0.}>0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2, a_3 \\ a_0, a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_{2.} - a_0 a_3>0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0\, \Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3, a_4 \\ a_1, a_2 \end{vmatrix} = a_3\, a_2 - a_1 a_4>0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3, a_4, 0 \\ a_1, a_2, a_3 \\ 0, \ a_0, a_1 \end{vmatrix} = a_3\,(a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 \ >0$$

Ponieważ

$$a_3\,(a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 = a_1 \overline{(a_3\, a_2 - a_2 a_4)}^{\Delta_2} - a_0\, a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$

KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $$\Delta_1>0; \quad \Delta_2>0; \ldots \quad \Delta_{n-2}>0; \quad \Delta_{n-1}>0;$$

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego a_{n-1}, a_{n-2},…, a_1,a_0.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.

Δ_n Δ_{n-1} Δ_{n-2} Δ_3 Δ_2 Δ_1

a_{n-1}	a_n	0	0	0	0	0	0
a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0	0	0	0
a_{n-5}	a_{n-4}	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0	0
0	0	0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	0	0	0	a_0	a_1	a_2
0	0	0	0	0	0	0	a_0

Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0\, \Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,

b) zbudować ciąg podwyznaczników Δ_1, Δ_2…. Δ_{n-1} i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \\ 0\ \ , \mathbf{a}_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 . >0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$\mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 .-a_0 a_3>0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0\, \Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$\mathbf{a}_4\mathbf{s}^4 + \mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = a_3\, a_2 - a_1 a_4>0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, 0 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ 0, \ \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_3\,(a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 \ >0$$

Ponieważ

$$a_3\,(a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 = a_1 \overbrace{(a_3\, a_2 - a_2 a_4)}^{\Delta_2} - a_0\, a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$

KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $\Delta_1>0;\quad \Delta_2>0;\ \ldots\ \Delta_{n-2}>0;\ \Delta_{n-1}>0;$

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.

Δ_n Δ_{n-1} Δ_{n-2} Δ_3 Δ_2 Δ_1

a_{n-1}	a_n	0	0	0	0	0	0
a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0	0	0	0
a_{n-5}	a_{n-4}	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0	0
0	0	0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	0	0	0	a_0	a_1	a_2
0	0	0	0	0	0	0	a_0

Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0\,\Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,

b) zbudować ciąg podwyznaczników $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_{n-1}$ i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ 0\ \ , a_0 \end{vmatrix}=a_1 a_{0.}>0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_2, a_3 \\ a_0, a_1 \end{vmatrix}=a_1 a_{2.}-a_0 a_3>0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0\,\Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3, a_4 \\ a_1, a_2 \end{vmatrix} = a_3\,a_2 - a_1 a_4>0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3, a_4, 0 \\ a_1, a_2, a_3 \\ 0,\ \ a_0, a_1 \end{vmatrix} = a_3\,(a_1\,a_2 - a_3 a_0) - a_4\,a_1^2\ >0$$

Ponieważ

$$a_3\,(a_1\,a_2 - a_3 a_0) - a_4\,a_1^2 = a_1\overline{(a_3\,a_2 - a_2 a_4)}^{\Delta_2} - a_0\,a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$

KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

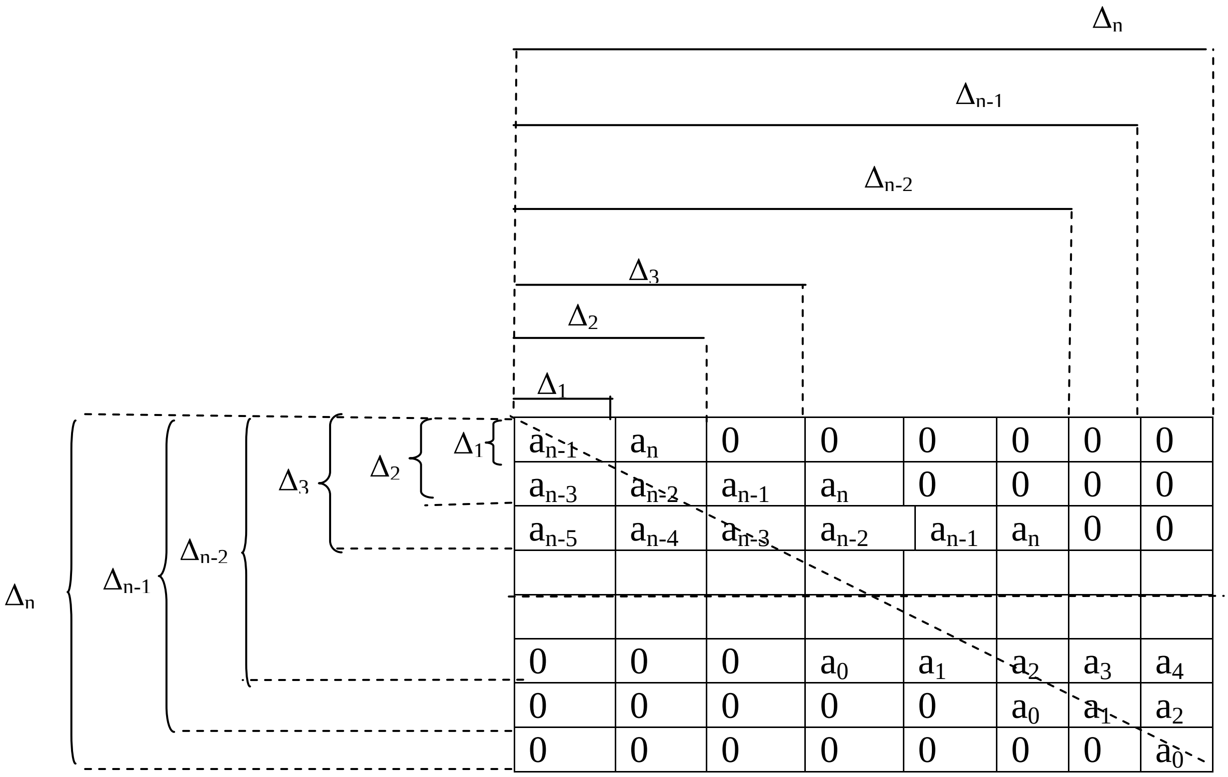
1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $\Delta_1>0$; $\Delta_2>0$; … $\Delta_{n-2}>0$; $\Delta_{n-1}>0$;

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego a_{n-1}, a_{n-2},…, a_1,a_0.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.



Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0\,\Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,

b) zbudować ciąg podwyznaczników $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_{n-1}$ i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ 0\ , a_0 \end{vmatrix}=a_1 a_0 >0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_2, a_3 \\ a_0, a_1 \end{vmatrix}=a_1 a_2 - a_0 a_3>0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0\,\Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3, a_4 \\ a_1, a_2 \end{vmatrix} = a_3\, a_2 - a_1 a_4>0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3, a_4, 0 \\ a_1, a_2, a_3 \\ 0, \ a_0, a_1 \end{vmatrix} = a_3\,(a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 >0$$

Ponieważ

$$a_3\,(a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 = a_1\overline{(a_3\, a_2 - a_2 a_4)}^{\Delta_2} - a_0\, a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$

KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

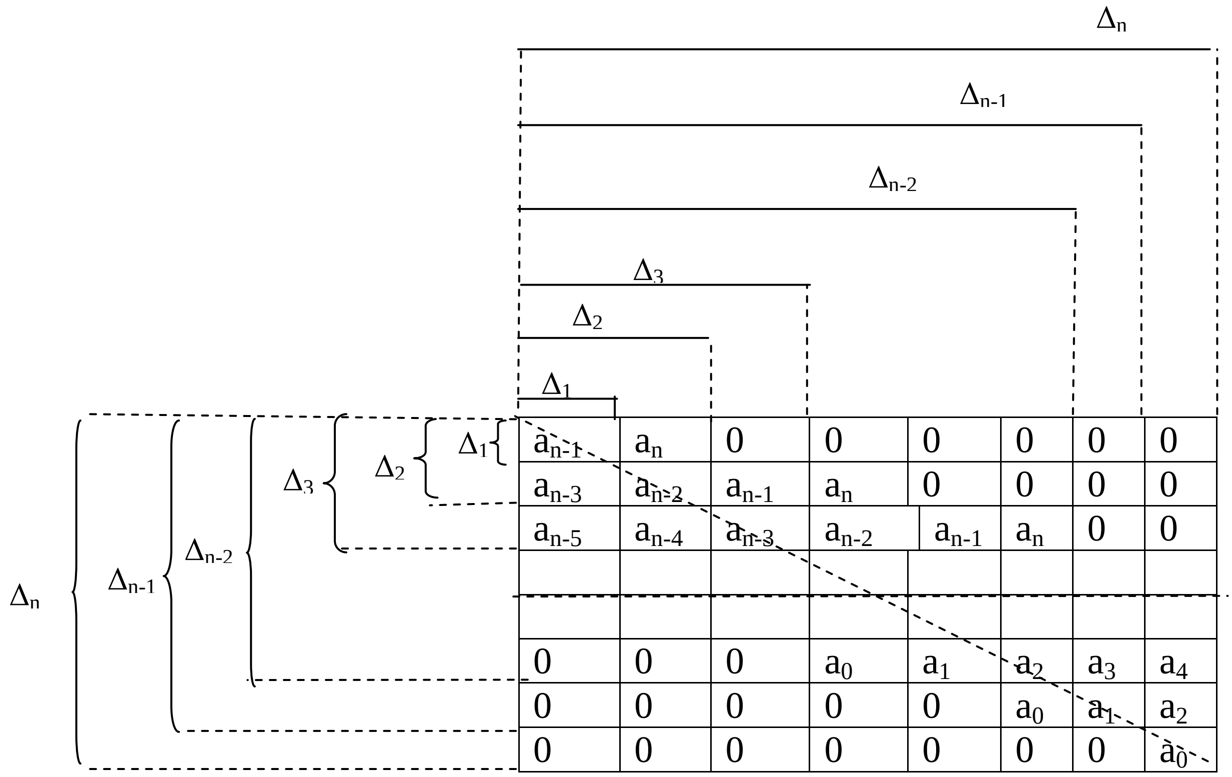
1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $\Delta_1>0;\quad \Delta_2>0;\ \ldots\ \Delta_{n-2}>0;\ \Delta_{n-1}>0;$

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego a_{n-1}, a_{n-2},…, a_1,a_0.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.



a_{n-1}	a_n	0	0	0	0	0	0
a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0	0	0	0
a_{n-5}	a_{n-4}	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0	0
0	0	0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	0	0	0	a_0	a_1	a_2
0	0	0	0	0	0	0	a_0

Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,

b) zbudować ciąg podwyznaczników Δ_1, Δ_2…. Δ_{n-1} i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \\ 0 \;\; , \mathbf{a}_0 \end{vmatrix} = a_1 a_{0.}>0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$\mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_1 a_{2.} - a_0 a_3>0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0\, \Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$\mathbf{a}_4\mathbf{s}^4 + \mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = a_3\, a_2 - a_1 a_4>0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, 0 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ 0, \;\; \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_3\, (a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 \;\; >0$$

Ponieważ

$$a_3\, (a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 = a_1\overbrace{(a_3\, a_2 - a_2 a_4)}^{\Delta_2} - a_0\, a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$

KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

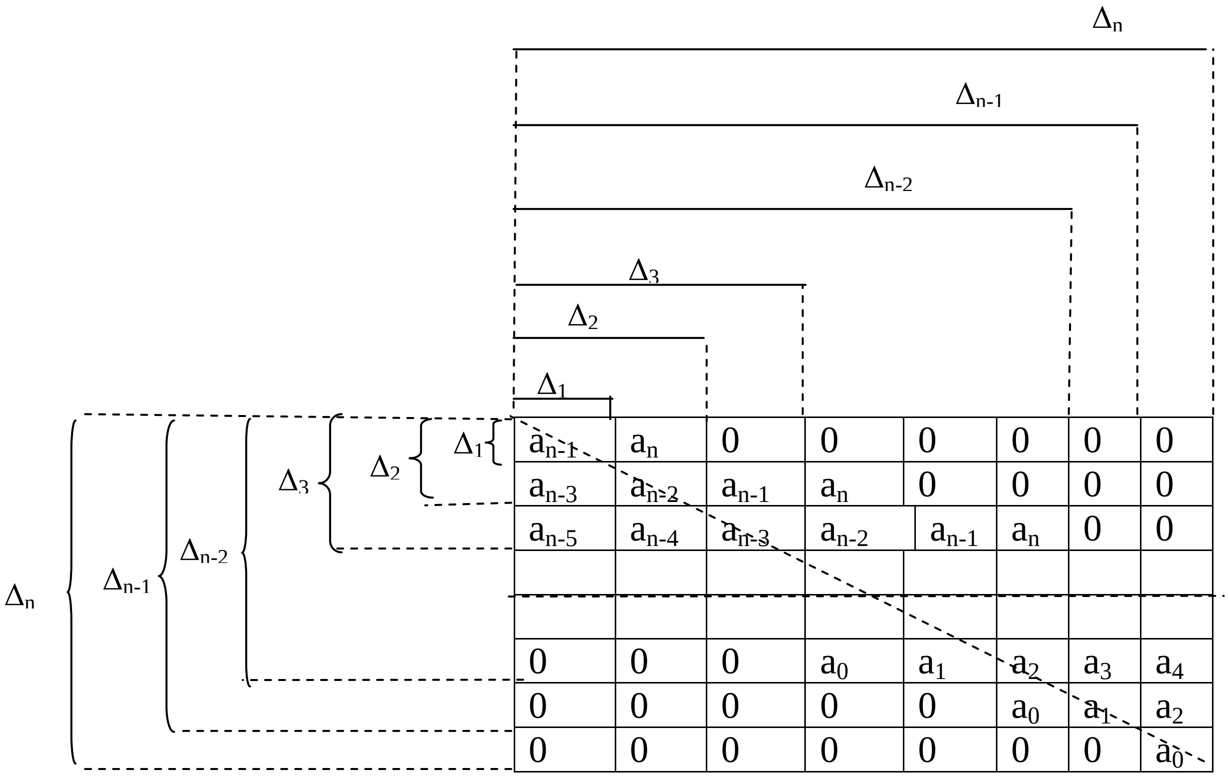
1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $\Delta_1>0;\ \ \Delta_2>0;\ \ldots\ \ \Delta_{n-2}>0;\ \ \Delta_{n-1}>0;$

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego a_{n-1}, a_{n-2},…, a_1,a_0.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.



Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,
b) zbudować ciąg podwyznaczników $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_{n-1}$ i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$
b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$
b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ 0\ , a_0 \end{vmatrix}=a_1 a_0>0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$
b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_2, a_3 \\ a_0, a_1 \end{vmatrix}=a_1 a_2 - a_0 a_3>0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0 \Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$
b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3, a_4 \\ a_1, a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_1 a_4>0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3, a_4, 0 \\ a_1, a_2, a_3 \\ 0, \ a_0, a_1 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_4 a_1^2 >0$$

Ponieważ

$$a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_4 a_1^2 = a_1 \overbrace{(a_3 a_2 - a_2 a_4)}^{\Delta_2} - a_0 a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$

KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

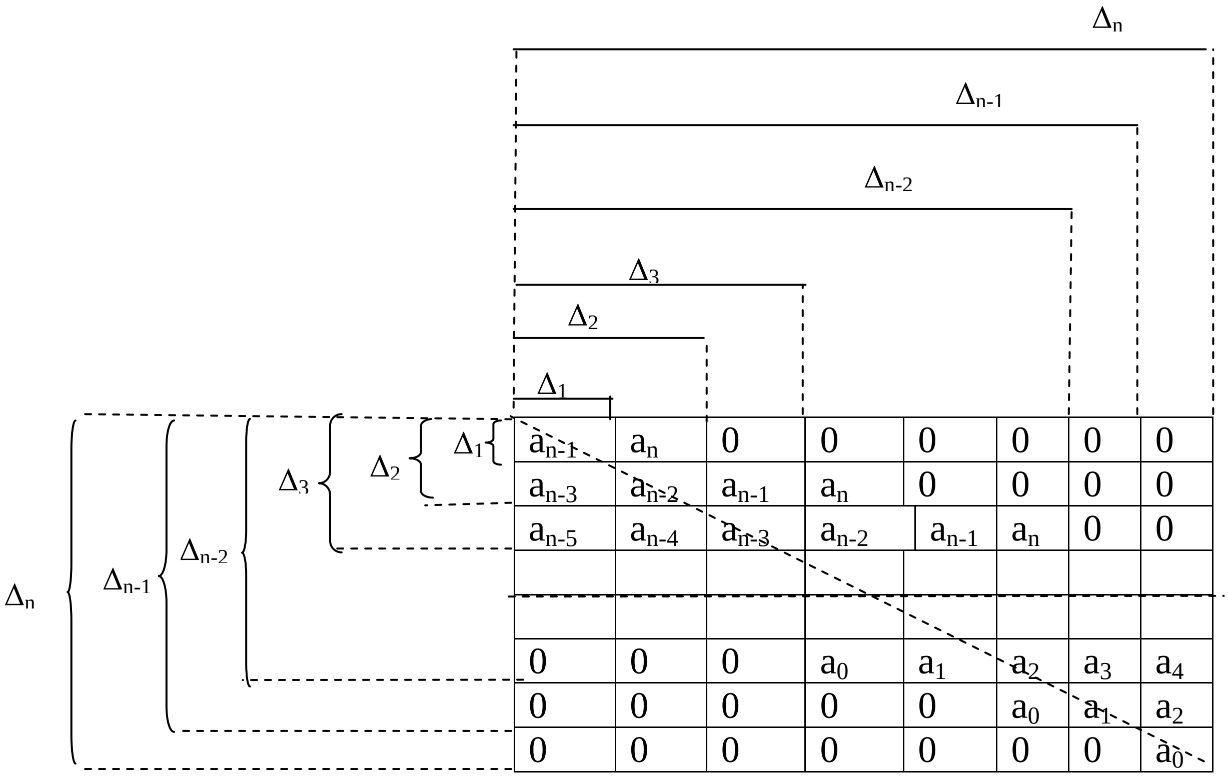
1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $\Delta_1>0$; $\Delta_2>0$; … $\Delta_{n-2}>0$; $\Delta_{n-1}>0$;

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego a_{n-1}, a_{n-2},…, a_1,a_0.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.



Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,
b) zbudować ciąg podwyznaczników $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_{n-1}$ i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$
b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$
b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \\ 0 \ \ , \mathbf{a}_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 . > 0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$\mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$
b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 .- a_0 a_3 > 0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0 \Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$\mathbf{a}_4\mathbf{s}^4 + \mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$
b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_1 a_4 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, 0 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ 0, \ \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_4 a_1^2 > 0$$

Ponieważ

$$a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_4 a_1^2 = a_1 \overline{(a_3 a_2 - a_2 a_4)}^{\Delta_2} - a_0 a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$

KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

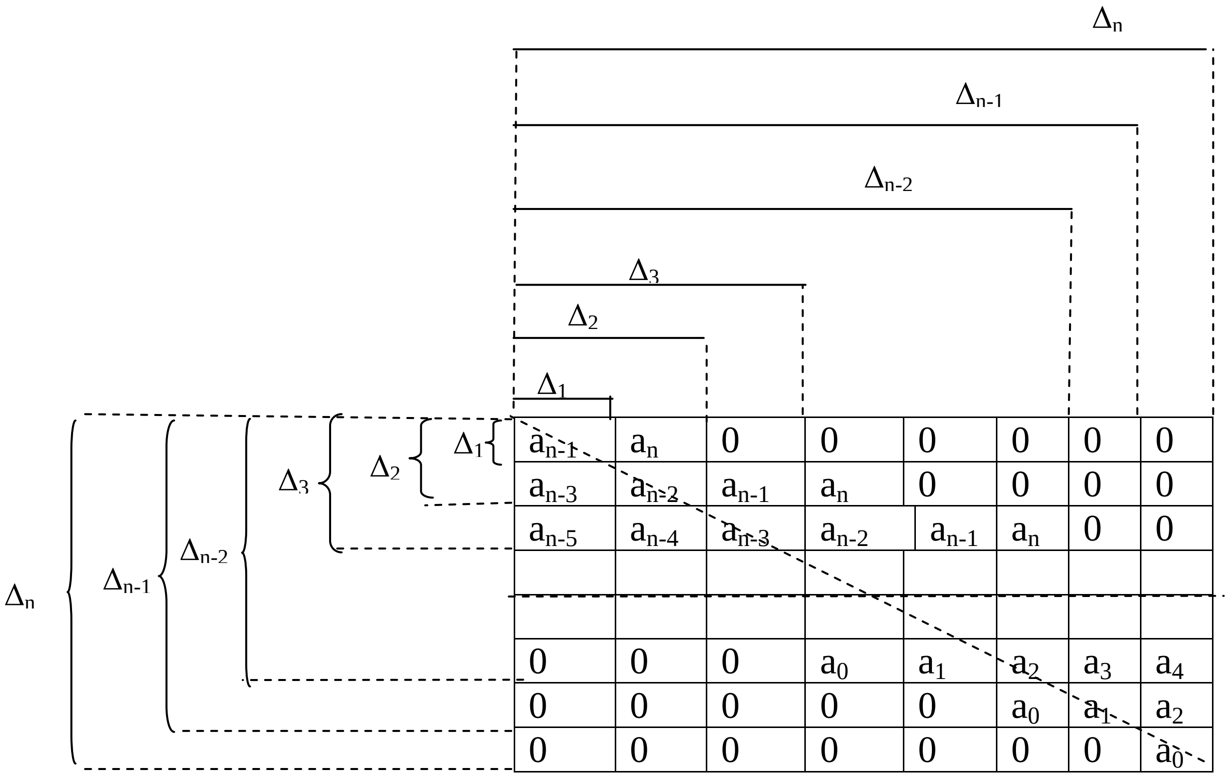
1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $\Delta_1>0;\ \ \Delta_2>0;\ \ldots\ \ \Delta_{n-2}>0;\ \ \Delta_{n-1}>0;$

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.



Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,

b) zbudować ciąg podwyznaczników $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_{n-1}$ i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \\ 0 \quad , \mathbf{a}_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$\mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0 \Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$\mathbf{a}_4\mathbf{s}^4 + \mathbf{a}_3\mathbf{s}^3 + \mathbf{a}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{s} + \mathbf{a}_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_1 a_4 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, 0 \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \\ 0, \quad \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_4 a_1^2 > 0$$

Ponieważ

$$a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_4 a_1^2 = a_1 \overbrace{(a_3 a_2 - a_2 a_4)}^{\Delta_2} - a_0 a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$

KRYTERIUM HURWITZA

Równanie charakterystyczne układu otwartego lub zamkniętego ma postać:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Przy czym wszystkie a_i są stałymi rzeczywistymi. Wszystkie pierwiastki (miejsca zerowe) tego równania będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny pierwiastków tylko wówczas tylko wówczas, jeśli zostaną spełnione dwa warunki:

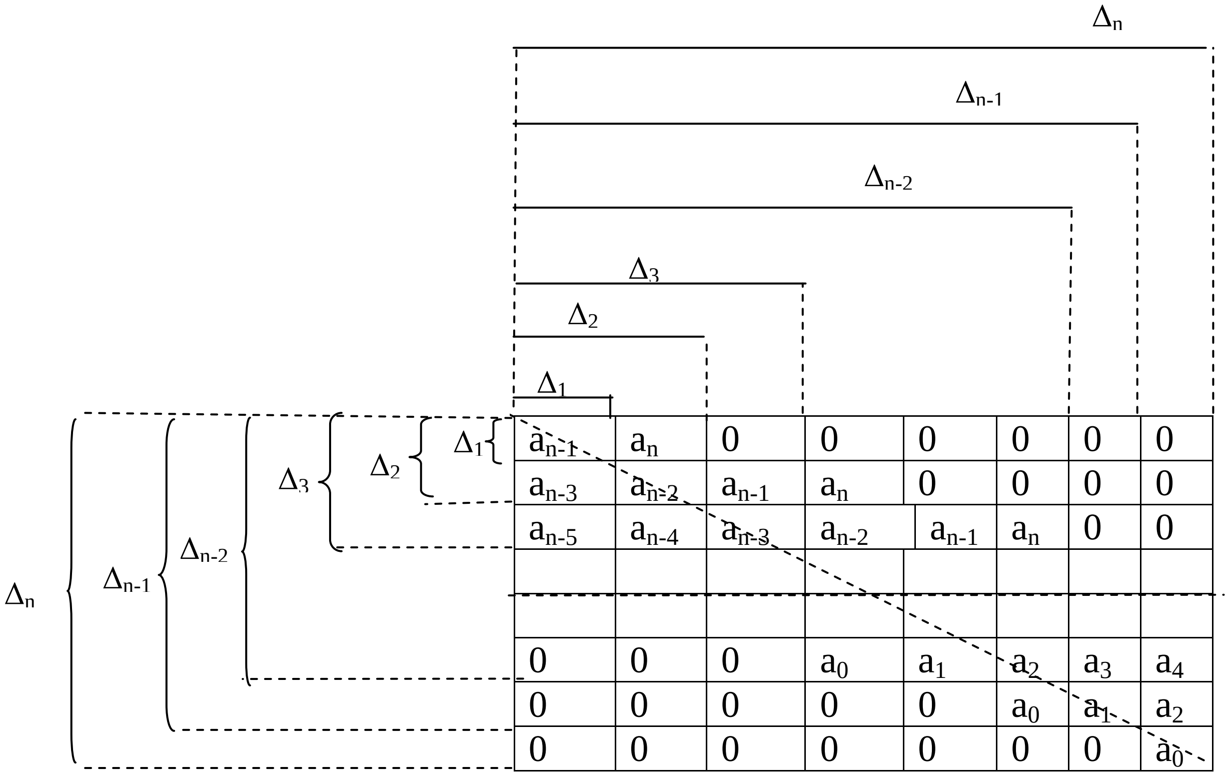
1. Wszystkie współczynniki a_i równania (1) winny mieć ten sam znak. Żaden z nich nie może też być równy zeru. Równanie (1) zawsze może być pomnożone obustronnie przez -1, żądanie to można więc sprowadzić do warunku: wszystkie współczynniki a_i muszą być większe od zera. Jest to warunek niezbędny, ale nie wystarczający.
2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie jest dodatni znak każdego z ciągu podwyznaczników:

   $\Delta_1>0;\ \ \Delta_2>0;\ \ldots\ \ \Delta_{n-2}>0;\ \ \Delta_{n-1}>0;$

   utworzonych według schematu podanego na rys. A. Wyznacznik główny Δ_n oraz podwyznaczniki układa się w następujący sposób:

   Na głównej przekątnej wyznacznika wypisujemy współczynniki równania charakterystycznego a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$.

   Każdy wiersz uzupełniamy współczynnikami tegoż równania tak, aby indeksy wzrastały z lewa na prawo. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n lub mniejsze od zera, zastępujemy zerami. Indeksy w kolumnach winny być kolejno nieparzyste i parzyste, a więc różnica między kolejnymi indeksami w kolumnie winna być zawsze równa dwa. Liczba wierszy wyznacznika Δ_n równa jest liczbie kolumn.



Wyznacznik główny oraz zasada budowy podwyznaczników w kryterium Hurwitza

Podwyznaczniki o stopniach malejących aż do jedności otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w podwyznacznikach o stopniu o jeden większym. Oczywiście jeżeli układ jest stabilny, wyznacznik główny Δ_n też jest dodatni, gdyż po rozwinięciu względem ostatniego wiersza ma miejsce zależność:

$$\Delta_n = a_0\,\Delta_{n-1}$$

zaś $a_n>0$ i $\Delta_{n-1}>0$ na podstawie warunków pierwszego i drugiego. Aby więc stwierdzić, wykorzystując kryterium Hurwitza, stabilność układu rzędu n należy:

a) sprawdzić, czy współczynniki a_i równania charakterystycznego układu istnieją i są większe od zera dla i=0, 1,2,3…,n,

b) zbudować ciąg podwyznaczników Δ_1, Δ_2…. Δ_{n-1} i sprawdzić czy są one większe od zera.

Warunki stabilności układów o równaniach charakterystycznych rzędu od pierwszego do czwartego.

1. Równanie charakterystyczne pierwszego rzędu:

$$a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

2. Równanie charakterystyczne drugiego rzędu:

a) $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ 0\ , a_0 \end{vmatrix}=a_1 a_0 . >0$$

3. Równanie charakterystyczne trzeciego rzędu:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_1 = a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_2, a_3 \\ a_0, a_1 \end{vmatrix}=a_1 a_2 .-a_0 a_3>0$$

Wyznacznik główny Δ_3 jest oczywiście dodatni na podstawie zależności $\Delta_3 = a_0\,\Delta_2$.

4. Równanie charakterystyczne czwartego rzędu:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

a) $a_4>0$, $a_3>0$, $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3, a_4 \\ a_1, a_2 \end{vmatrix} = a_3\, a_2 - a_1 a_4>0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3, a_4, 0 \\ a_1, a_2, a_3 \\ 0, \ a_0, a_1 \end{vmatrix} = a_3\,(a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 \ >0$$

Ponieważ

$$a_3\,(a_1\, a_2 - a_3 a_0) - a_4\, a_1^2 = a_1 \overbrace{(a_3\, a_2 - a_2 a_4)}^{\Delta_2} - a_0\, a_3^2$$

więc dla zachowania warunku drugiego wystarczy spełnienie nierówności $\Delta_3 > 0$